Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour en savoir plus sur nos formations disponibles, veuillez visiter :
formav.co/explorer

BTS BioRP

Mathématiques - BTS, groupement B

Session 2023 • Code sujet : **23MATGRB2** • Durée : **2 heures** • Coefficient : **1,5 en conception et industrialisation en microtechniques ; 2 en électrotechnique**

Sommaire

Cliquez sur une partie pour y accéder directement

1. Fermeture d’un tiroir : équation différentielle et étude de fonction (12 questions) **Page 3**

2. Étude d’une fonction périodique et série de Fourier (10 questions) **Page 7**

3. Ce qu’il faut retenir & Questions fréquentes (FAQ) (Synthèse & Q&A Examen) **Page 11**

Sujet officiel (PDF) : https://btsbiorp.fr/assets/annales/bts-biorp/E2 - Mathématiques/2023/BTS BioRP - E2 - Mathématiques - Session 2023 - 2-Sujet.pdf

1. Fermeture d’un tiroir : équation différentielle et étude de fonction

La distance entre le fond d’un tiroir et celui du meuble est modélisée par une fonction f du temps, exprimée en centimètres. L’exercice mobilise une équation différentielle, l’étude de cette fonction et un algorithme pour examiner le seuil de fermeture, puis calcule la position moyenne du tiroir.

Partie A

Question 1. a. Résoudre l’équation caractéristique r² + 5r + 4 = 0.

Le discriminant vaut $\Delta = 5^2 - 4 \times 1 \times 4 = 9$. Les racines sont $r = \frac{-5 \pm \sqrt{9}}{2}$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $r_1 = -1$ et $r_2 = -4$.

Question 1. b. À l’aide du tableau fourni, résoudre l’équation différentielle y'' + 5y' + 4y = 0.

L’équation caractéristique a deux racines réelles distinctes, -1 et -4. D’après le tableau fourni, la solution générale est une combinaison des exponentielles associées à ces racines.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-4t}$, avec $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

Question 2. a. À partir de la distance initiale de 20 cm et de la vitesse initiale de -10 cm·s⁻¹, déterminer f(0) et f'(0).

À l’instant initial, la distance entre M et O vaut 20 cm. La vitesse de déplacement est la dérivée de cette distance et elle est donnée comme négative, puisque le tiroir se rapproche de O.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $f(0) = 20$ cm et $f'(0) = -10$ cm·s⁻¹.

Question 2. b. En utilisant l’expression admise de f(t), déterminer la valeur exacte de la distance OM deux secondes après le début de la fermeture.

On remplace t par 2 dans l’expression donnée : $f(2) = \frac{70}{3} e^{-2} - \frac{10}{3} e^{-8}$. Cette valeur est la distance exacte en centimètres.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $OM = f(2) = \frac{70}{3} e^{-2} - \frac{10}{3} e^{-8}$ cm.

Question 2. c. **Le tiroir est considéré fermé lorsque OM est inférieure à 0,5 cm. Déterminer si le constructeur a raison d'affirmer que le tiroir est fermé en moins de 4 secondes, et justifier.**

À 4 secondes, $f(4) = \frac{70}{3}e^{-4} - \frac{10}{3}e^{-16} \approx 0,4274$ cm, valeur inférieure à 0,5 cm. Comme f est continue et que $f(0) = 20$ cm, elle atteint le seuil avant 4 secondes.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Oui, le tiroir est fermé avant 4 secondes : $f(4) \approx 0,4274 < 0,5$ cm.

Partie B

Question 1. a. **En utilisant la limite rappelée de e^{-u} lorsque u tend vers +∞, déterminer la limite de f(t) lorsque t tend vers +∞.**

Quand $t \to +\infty$, les termes e^{-t} et e^{-4t} tendent vers 0. La fonction étant une combinaison de ces deux termes, sa limite est nulle.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = 0$.

Question 1. b. **Déduire de la limite de f que sa courbe représentative possède une asymptote, puis en donner une équation.**

La limite de $f(t)$ en $+\infty$ étant nulle, la courbe représentative admet une asymptote horizontale d'équation $y = 0$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Asymptote horizontale : $y = 0$.

Question 2. a. **Déterminer l'expression de f'(t) pour tout t appartenant à [0 ; +∞[.**

On dérive chaque exponentielle avec la règle $(e^{at})' = ae^{at}$. Ainsi, $\left(\frac{70}{3}e^{-t}\right)' = -\frac{70}{3}e^{-t}$ et $\left(-\frac{10}{3}e^{-4t}\right)' = \frac{40}{3}e^{-4t}$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $f'(t) = -\frac{70}{3}e^{-t} + \frac{40}{3}e^{-4t}$.

Question 2. b. **Sachant que f'(t) < 0 sur [0 ; +∞[, dresser le tableau de variations de f sur cet intervalle.**

La fonction est strictement décroissante puisque $f'(t) < 0$. De plus, $f(0) = 20$ et sa limite en $+\infty$ est 0.

t	**0**	$+\infty$
$f'(t)$		–
$f(t)$	20	↘ 0

✓ RÉPONSE À RETENIR

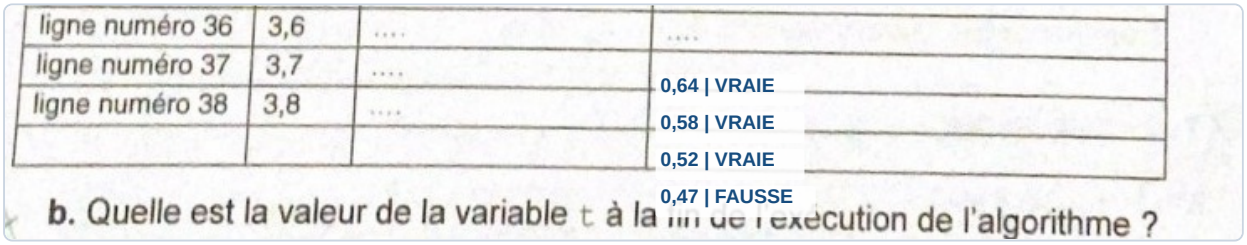
f décroît de 20 vers 0 sur $[0; +\infty[$.

Question 3. a. Compléter le tableau de suivi de l'algorithme à partir de la ligne 36, en indiquant t, la valeur de f(t) arrondie au centième et la valeur de la condition, jusqu'à l'arrêt de l'algorithme.

L'algorithme poursuit tant que $f(t) > 0,5$. Les valeurs arrondies sont au centième, mais la condition est testée sur la valeur exacte : elle devient fausse à la ligne 39.

Ligne	t	$f(t)$**, au centième**	**Condition**
36	3,6	0,64	VRAIE
37	3,7	0,58	VRAIE
38	3,8	0,52	VRAIE
39	3,9	0,47	FAUSSE

Tableau de suivi complété



✓ RÉPONSE À RETENIR

L'algorithme s'arrête à $t = 3,9$ s.

Question 3. b. Donner la valeur de t à la fin de l'exécution de l'algorithme et interpréter le résultat dans le contexte de la fermeture du tiroir.

La première valeur testée pour laquelle la condition $f(t) > 0,5$ est fausse est $t = 3,9$, puisque $f(3,9) \approx 0,47$ cm. Le tiroir est donc considéré fermé à cet instant.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$t = 3,9$ s : le tiroir est fermé, car sa distance est inférieure à 0,5 cm.

Question 4. À partir de la définition de la position moyenne m du tiroir sur [0 ; 4], démontrer que m = 45/8 - (35/6)e⁻⁴ + (5/24)e⁻¹⁶.

Par définition, $m = \frac{1}{4}\int_0^4 f(t)\,dt$. Une primitive de f est $-\frac{70}{3}e^{-t} + \frac{5}{6}e^{-4t}$. On évalue cette primitive entre 0 et 4, puis on divise par 4.

$m = \frac{1}{4}\left[-\frac{70}{3}e^{-t} + \frac{5}{6}e^{-4t}\right]_0^4 = \frac{45}{8} - \frac{35}{6}e^{-4} + \frac{5}{24}e^{-16}$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$m = \frac{45}{8} - \frac{35}{6}e^{-4} + \frac{5}{24}e^{-16} \approx 5,5182$ cm.

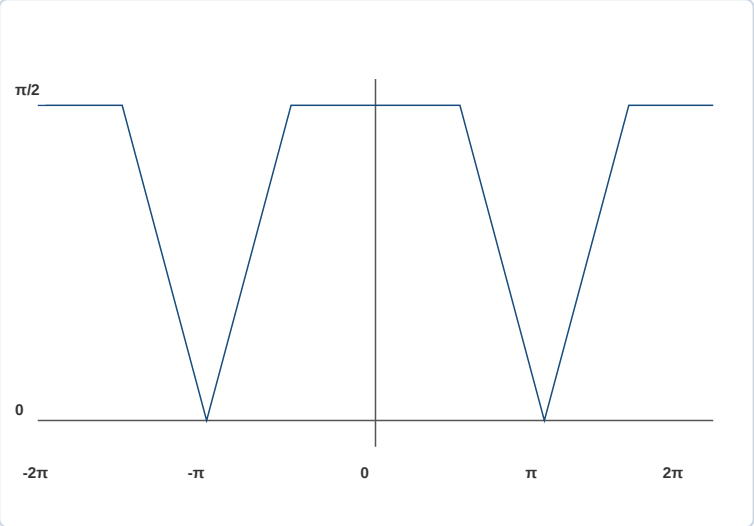
2. Étude d’une fonction périodique et série de Fourier

On étudie une fonction paire, périodique de période 2π, définie par morceaux sur [0 ; π] : elle vaut π/2 sur [0 ; π/2[, puis π - t sur [π/2 ; π]. Les questions portent sur son graphique, ses coefficients de Fourier, une somme partielle et l’approximation de sa valeur efficace.

Question 1. Sur le document-réponse, tracer la représentation graphique de la fonction f sur l’intervalle [-2π ; 2π].

Sur $[-2\pi; 2\pi]$, la courbe est paire et périodique de période 2π. Elle vaut $\pi/2$ de $-\pi/2$ à $\pi/2$, puis descend linéairement jusqu’à 0 en π. Par symétrie et répétition, elle atteint aussi 0 en $-\pi$, remonte jusqu’à $\pi/2$ en $-\pi/2$, puis répète le motif. Le tracé ci-joint indique ces points et les portions horizontales.

Courbe de f sur [-2π ; 2π]



✓ RÉPONSE À RETENIR

Graphe périodique : plateaux à $\pi/2$, minima nuls en $t = \pm\pi$.

Question 2. Démontrer que, pour tout entier n supérieur ou égal à 1, le coefficient de Fourier b_n est nul.

Le formulaire donne $b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\sin(nt)\,dt$. Pour n entier, le produit $f(t)\sin(nt)$ est de période 2π, donc on peut intégrer sur $[-\pi; \pi]$ à la place. Or f est paire et $\sin(nt)$ est impaire : leur produit est impair. L’intégrale sur cet intervalle symétrique est nulle.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Pour tout $n \geq 1$, $b_n = 0$.

Question 3. **Déterminer la pulsation ω associée à la fonction f.**

La période indiquée dans l'énoncé est $T = 2\pi$. D'après le formulaire, la pulsation associée à une fonction de période T est $\omega = \frac{2\pi}{T}$. En remplaçant T par sa valeur, on obtient $\omega = \frac{2\pi}{2\pi} = 1$. L'unité est le radian par unité de temps.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $\omega = 1$ rad par unité de temps.

Question 4. **Démontrer que le coefficient a_0 est égal à 3π/8.**

La fonction est paire et sa période vaut 2π. La formule du formulaire donne $a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\,dt$. Sur $[0;\pi/2[$, l'aire du rectangle vaut $\pi^2/4$. Sur $[\pi/2;\pi]$, l'aire du triangle vaut $\pi^2/8$. Ainsi, l'intégrale vaut $3\pi^2/8$, puis on divise par π.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $a_0 = \frac{3\pi}{8}$.

Question 5. **Démontrer que, pour tout entier n supérieur ou égal à 1, a_n = ∫₀^(π/2) cos(nt) dt + (2/π)∫_(π/2)^π (π - t)cos(nt) dt.**

Comme f est paire, le formulaire donne, pour $n \geq 1$, $a_n = \frac{4}{T}\int_0^{T/2} f(t)\cos(n\omega t)\,dt$. Avec $T = 2\pi$ et $\omega = 1$, cela devient $\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\cos(nt)\,dt$. On sépare cette intégrale en $\pi/2$, puis on remplace f par ses expressions sur les deux intervalles.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $a_n = \int_0^{\pi/2}\cos(nt)\,dt + \frac{2}{\pi}\int_{\pi/2}^{\pi}(\pi - t)\cos(nt)\,dt$.

Question 6. **En utilisant l'expression admise a_n = 2/(πn²)(cos(nπ/2) - cos(nπ)), déterminer les valeurs exactes de a_1, a_2 et a_3.**

On applique la formule admise $a_n = \frac{2}{\pi n^2}\left(\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) - \cos(n\pi)\right)$ aux trois premiers entiers. Pour $n = 1$ et $n = 3$, les cosinus donnent respectivement $0 - (-1)$. Pour $n = 2$, ils donnent $(-1) - 1$. On simplifie alors chaque expression.

Coefficient	Valeur exacte
a_1	$\frac{2}{\pi}$
a_2	$-\frac{1}{\pi}$
a_3	$\frac{2}{9\pi}$

✓ **RÉPONSE À RETENIR**

$a_1 = \frac{2}{\pi}, \quad a_2 = -\frac{1}{\pi}, \quad a_3 = \frac{2}{9\pi}.$

Question 7. Déduire l'expression $s_3(t) = 3\pi/8 + (2/\pi)\cos(t) - (1/\pi)\cos(2t) + (2/(9\pi))\cos(3t)$.

La somme partielle d'ordre 3 est $s_3(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{3} a_n \cos(n\omega t)$, car les coefficients b_n sont nuls. La pulsation vaut 1, donc les termes en cosinus sont $\cos(t)$, $\cos(2t)$ et $\cos(3t)$. En remplaçant les coefficients par leurs valeurs exactes, on obtient l'expression demandée.

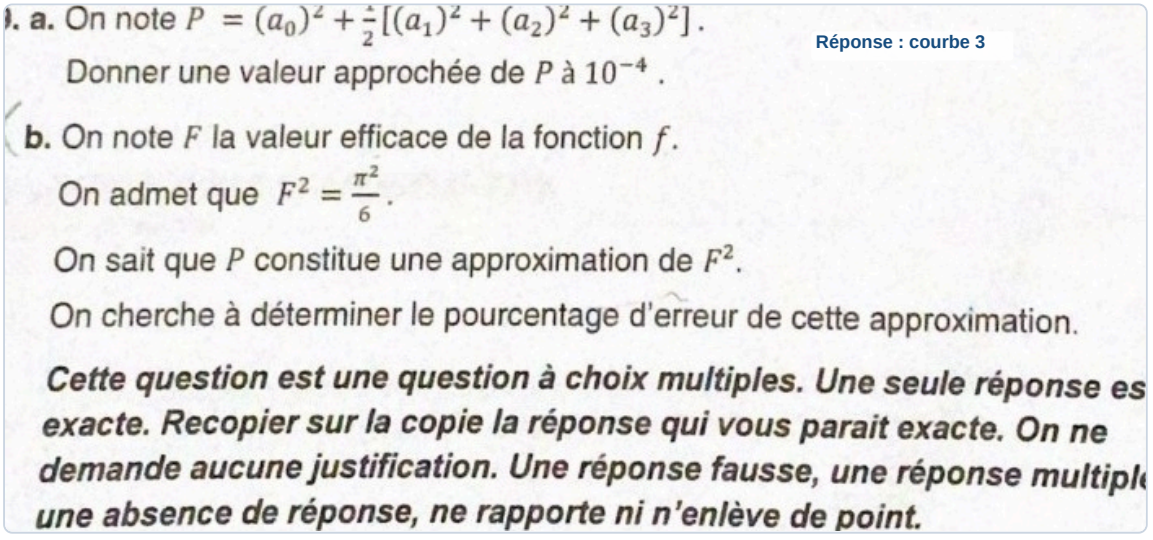
✓ **RÉPONSE À RETENIR**

$s_3(t) = \frac{3\pi}{8} + \frac{2}{\pi}\cos(t) - \frac{1}{\pi}\cos(2t) + \frac{2}{9\pi}\cos(3t).$

Question 8. Indiquer, sans justification, laquelle des trois courbes proposées correspond à la fonction s_3.

La courbe de s_3 est périodique et présente des creux près de $t = -\pi$ et $t = \pi$, tout en restant proche de sa valeur moyenne ailleurs. Parmi les trois tracés proposés, la courbe numéro 3 présente cette forme. L'annotation ci-jointe identifie directement la réponse sur la page du sujet.

Courbe correspondant à s_3



✓ **RÉPONSE À RETENIR**

Courbe numéro 3.

Question 9. a. **Pour P = (a₀)² + 1/2[(a₁)² + (a₂)² + (a₃)²], donner une valeur approchée de P à 10^{-4} près.**

On utilise $P = a_0^2 + \frac{1}{2}(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)$, avec les coefficients trouvés précédemment. Les carrés des trois coefficients non constants donnent $\frac{4}{\pi^2} + \frac{1}{\pi^2} + \frac{4}{81\pi^2}$. Après multiplication par $1/2$ et ajout de $a_0^2 = \frac{9\pi^2}{64}$, on obtient $P = \frac{9\pi^2}{64} + \frac{409}{162\pi^2}$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $P \approx 1{,}6437$.

Question 9. b. **Sachant que F² = π²/6 et que P approche F², choisir parmi 0,1 %, 1 % et 10 % le pourcentage d'erreur de cette approximation. Une seule réponse est exacte et aucune justification n'est demandée.**

Le pourcentage d'erreur relatif de l'approximation est $100 \times \frac{|P - F^2|}{F^2}$. En remplaçant P par sa valeur non arrondie et F^2 par $\pi^2/6$, on obtient environ $0{,}074\,\%$. Parmi les choix proposés, cette valeur s'arrondit à $0{,}1\,\%$, et non à $1\,\%$ ou $10\,\%$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $0{,}1\,\%$.

Ce qu'il faut retenir de ce sujet (Session 2023)

Bilan de l'épreuve : Épreuve de mathématiques du BTS, session 2023, groupement B, code 23MATGRB2, d'une durée de 2 heures. Le coefficient est de 1,5 en conception et industrialisation en microtechniques et de 2 en électrotechnique. Deux exercices de 10 points étudient la fermeture d'un tiroir par équation différentielle et une fonction paire par série de Fourier, jusqu'à l'approximation de sa valeur efficace.

Notions-clés, formules & règles à maîtriser

- Pour $y'' + 5y' + 4y = 0$, l'équation caractéristique $r^2 + 5r + 4 = 0$ détermine les solutions exponentielles.
- Si $f(t)$ tend vers L lorsque t tend vers $+\infty$, sa courbe admet l'asymptote horizontale d'équation $y = L$.
- La pulsation d'une fonction de période T vaut $\omega = 2\pi/T$; pour une fonction paire, les coefficients sinusoïdaux b_n sont nuls.
- Pour une fonction paire, $a_n = 4/T \int_0^{(T/2)} f(t)\cos(n\omega t)\, dt$, pour n supérieur ou égal à 1.

Points de vigilance & attentes du jury

- Respecter les conditions initiales et le signe de la vitesse lors de la modélisation de la distance.
- Dans l'algorithme, distinguer la valeur calculée de $f(t)$ et le test de la condition d'arrêt.
- Pour Fourier, utiliser la période et la parité avant de calculer les coefficients.
- Pour le pourcentage d'erreur, comparer P à F^2, et non à F, puis sélectionner une seule réponse.

Questions fréquentes sur cette épreuve (Q&A Examen)

Q : Comment résoudre l'équation différentielle du tiroir ?

On résout d'abord l'équation caractéristique $r^2 + 5r + 4 = 0$. Ses racines donnent la forme générale de la solution exponentielle. On détermine ensuite les constantes à l'aide des valeurs de $f(0)$ et de $f'(0)$.

Q : Pourquoi les coefficients b_n sont-ils nuls dans l'exercice sur Fourier ?

La fonction f est paire et $\sin(n\omega t)$ est impaire. Leur produit est donc impair, et son intégrale sur un intervalle symétrique est nulle. Ainsi, les coefficients b_n de la série de Fourier sont nuls.

Q : Combien de temps dure l'épreuve et comment répartir les exercices ?

L'épreuve dure 2 heures et comporte deux exercices de 10 points. Vous pouvez les traiter indépendamment. Gardez du temps pour vérifier les calculs et le tableau de l'algorithme ; une calculatrice en mode examen ou sans mémoire est autorisée.

Q : Quelles justifications faut-il apporter pour les calculs de Fourier ?

Pour les questions de démonstration, utilisez les formules du formulaire et explicitez l'effet de la période et de la parité. Pour la question à choix multiples sur le pourcentage d'erreur, le sujet précise qu'aucune justification n'est demandée.

Sujet officiel associé (PDF) : https://btsbiorp.fr/assets/annales/bts-biorp/E2 - Mathématiques/2023/BTS BioRP - E2 - Mathématiques - Session 2023 - 2-Sujet.pdf
Ressources BTS BioRP : Toutes les annales & corrigés • Fiches de révision complètes • Simulateur de notes d'examen

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.