Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour en savoir plus sur nos formations disponibles, veuillez visiter :
formav.co/explorer

BTS BioRP

Mathématiques - Groupement B

Session 2023 • Code sujet : **23MATGRB1** • Durée : **2 heures** • Coefficient : **2, sauf Traitement des matériaux (2 options) : 3**

Sommaire

Cliquez sur une partie pour y accéder directement

1. Fermeture d’un tiroir : équation différentielle et étude de fonction (14 questions) **Page 3**

2. Magasin de vélos : probabilités, loi binomiale et intervalle de confiance (10 questions) **Page 7**

3. Ce qu’il faut retenir & Questions fréquentes (FAQ) (Synthèse & Q&A Examen) **Page 11**

Sujet officiel (PDF) : https://btsbiorp.fr/assets/annales/bts-biorp/E2 - Mathématiques/2023/BTS BioRP - E2 - Mathématiques - Session 2023 - 1-Sujet.pdf

1. Fermeture d’un tiroir : équation différentielle et étude de fonction

La distance entre le fond du tiroir et le fond du meuble est modélisée par une fonction exponentielle du temps. L’exercice étudie l’équation différentielle, les conditions initiales, les variations et le développement limité de cette fonction, ainsi qu’un algorithme qui repère le franchissement du seuil de fermeture.

Partie A - Résolution d’une équation différentielle

Question 1.a. **Résoudre l’équation caractéristique r² + 5r + 4 = 0.**

Le discriminant vaut $\Delta = 5^2 - 4 \times 1 \times 4 = 9$. Ainsi, $r = \frac{-5 \pm \sqrt{9}}{2}$, d’où les deux racines.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> $r = -1$ ou $r = -4$.

Question 1.b. **À l’aide du tableau fourni, résoudre l’équation différentielle y'' + 5y' + 4y = 0.**

Les racines de l’équation caractéristique sont réelles et distinctes. Le tableau fourni associe alors à chacune une exponentielle de la forme e^{rt}.

La solution générale est une combinaison linéaire de ces deux fonctions.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-4t}$, avec $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

Partie A - Conditions initiales

Question 2.a. **Sachant qu’à l’instant t = 0 le point M est à 20 cm de O et se déplace vers O à la vitesse de -10 cm·s⁻¹, déterminer f(0) et f'(0).**

- La distance initiale OM est de 20 cm, donc $f(0) = 20$.
- La vitesse initiale est donnée comme négative et vaut -10 cm·s^{-1}, donc $f'(0) = -10$.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> $f(0) = 20$ cm et $f'(0) = -10$ cm·s^{-1}.

Question 2.b. **En utilisant l’expression admise f(t) = (70/3)e⁻ᵗ - (10/3)e⁻⁴ᵗ, déterminer la valeur exacte de la distance OM deux secondes après le début de la fermeture.**

On évalue l’expression donnée à $t = 2$:

$f(2) = \frac{70}{3}e^{-2} - \frac{10}{3}e^{-8}$ cm, soit environ $3{,}157$ cm.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$OM(2) = \frac{70}{3}e^{-2} - \frac{10}{3}e^{-8}$ cm.

Question Suite de 2. Le tiroir est considéré fermé lorsque la distance OM est inférieure à 0,5 cm. Déterminer si le constructeur a raison d'affirmer que le tiroir est fermé en moins de 4 secondes et justifier.

À 4 secondes, $f(4) = \frac{70}{3}e^{-4} - \frac{10}{3}e^{-16} \approx 0{,}427$ cm, donc la distance est inférieure à 0,5 cm. Comme $f(0) = 20$ cm et que f est continue, elle a franchi le seuil avant 4 secondes.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Oui, le tiroir est fermé en moins de 4 secondes.

Partie B - Étude de fonction

Question 1.a. En rappelant que la limite de e^{-u} est nulle lorsque u tend vers +∞, déterminer la limite de f(t) lorsque t tend vers +∞.

Les deux exponentielles e^{-t} et e^{-4t} tendent vers zéro lorsque t tend vers $+\infty$. Leur combinaison linéaire tend donc également vers zéro.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = 0$.

Question 1.b. Déduire de cette limite que la courbe représentative de f possède une asymptote et en donner une équation.

La limite de $f(t)$ en $+\infty$ étant finie, la courbe admet une asymptote horizontale d'ordonnée égale à cette limite.

Son équation est $y = 0$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Asymptote horizontale : $y = 0$.

Question 2.a. Déterminer f'(t) pour tout t appartenant à [0 ; +∞[.

On dérive chaque exponentielle selon $(e^{at})' = ae^{at}$. Ainsi, le premier terme donne $-\frac{70}{3}e^{-t}$ et le second $\frac{40}{3}e^{-4t}$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$f'(t) = -\frac{70}{3}e^{-t} + \frac{40}{3}e^{-4t}$.

Question 2.b. **Sachant que f'(t) < 0 sur [0 ; +∞[, établir le tableau de variations de f sur cet intervalle.**

La fonction est strictement décroissante puisque $f'(t) < 0$. Elle vaut 20 en 0 et tend vers 0 en $+\infty$.

t	**0**	$+\infty$
Signe de $f'(t)$	$-$	
Variation de f	20	$\searrow 0$

✓ RÉPONSE À RETENIR

f décroît de 20 à 0 sur $[0, +\infty[$.

Question 3.a. **Compléter le tableau de l'algorithme à partir de la ligne 36, en ajoutant des lignes si nécessaire jusqu'à l'arrêt. Pour chaque ligne, indiquer t, la valeur de f(t) arrondie au centième et si la condition de la boucle est vraie ou fausse.**

Ligne	t	$f(t)$**, au centième**	**Condition** $f(t) > 0{,}5$
36	3,6	0,64	VRAIE
37	3,7	0,58	VRAIE
38	3,8	0,52	VRAIE
39	3,9	0,47	FAUSSE

Le test porte sur la valeur non arrondie de $f(t)$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

L'algorithme s'arrête à la ligne 39.

Question 3.b. **Donner la valeur de t à la fin de l'exécution de l'algorithme et interpréter le résultat dans le contexte de la fermeture du tiroir.**

À $t = 3{,}8$, la distance dépasse encore 0,5 cm. À $t = 3{,}9$, elle est inférieure au seuil : la condition devient fausse et la boucle s'arrête.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$t = 3{,}9$ s : le tiroir est fermé au premier dixième de seconde testé sous le seuil.

Question 4.a. À partir de la partie régulière du développement limité fournie, déterminer une équation de la tangente T à la courbe au point d'abscisse 0.

La partie régulière du développement limité est $20 - 10t - 15t^2$. La tangente en 0 conserve le terme constant et le terme linéaire : son ordonnée à l'origine est 20 et son coefficient directeur est -10.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$T : y = 20 - 10t$.

Question 4.b. Parmi les propositions, recopier l'unique expression exacte du développement limité de f à l'ordre deux au voisinage de 0. Aucune justification n'est demandée.

Le terme régulier d'ordre deux est $20 - 10t - 15t^2$. Le reste d'un développement limité à cet ordre s'écrit $t^2\varepsilon(t)$, avec $\varepsilon(t) \to 0$ lorsque $t \to 0$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$f(t) = 20 - 10t - 15t^2 + t^2\varepsilon(t)$, où $\lim_{t\to 0} \varepsilon(t) = 0$.

Question 4.c. À partir du développement limité, indiquer si, au voisinage de 0, la courbe C est au-dessus ou en dessous de sa tangente T. Une seule réponse est exacte et aucune justification n'est demandée.

Le développement limité donne $f(t) - T(t) = t^2(-15 + \varepsilon(t))$. Au voisinage de 0, ce terme est négatif pour $t > 0$.

- La courbe est donc en dessous de sa tangente.

✓ RÉPONSE À RETENIR

La courbe C est en dessous de la tangente T au voisinage de 0.

2. Magasin de vélos : probabilités, loi binomiale et intervalle de confiance

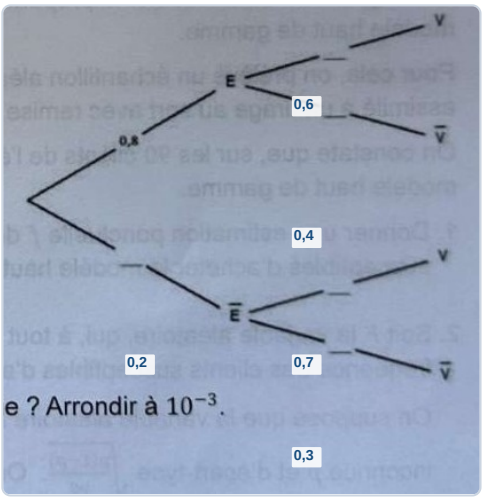
Un magasin prête des vélos électriques ou mécaniques afin de favoriser les ventes, puis étudie les durées de réparation sur un échantillon. L'exercice porte aussi sur l'estimation de la proportion de clients susceptibles d'acheter un modèle haut de gamme.

Partie A - Probabilités conditionnelles

Question 1. Recopier et compléter l'arbre pondéré décrivant le type de vélo prêté puis l'issue du prêt en matière de vente.

Le premier niveau distingue les vélos électriques et mécaniques. Les probabilités correspondantes sont 0,8 et 0,2. Au second niveau, on inscrit les probabilités conditionnelles de vente et de non-vente : 0,6 et 0,4 après un vélo électrique, puis 0,7 et 0,3 après un vélo mécanique. Les deux probabilités de chaque paire sont complémentaires. L'arbre complété est annoté directement sur le schéma du sujet.

Arbre pondéré complété



✓ RÉPONSE À RETENIR

E : 0,8 ; non E : 0,2. Depuis E : V 0,6, non V 0,4. Depuis non E : V 0,7, non V 0,3.

Question 2. Déterminer la probabilité que le vélo prêté soit électrique et que le prêt débouche sur une vente, soit P(E ∩ V).

L'événement E ∩ V signifie que le vélo prêté est électrique et que le prêt aboutit à une vente. On utilise donc la probabilité d'avoir un vélo électrique, puis la probabilité conditionnelle de vente pour ce type de vélo. Ainsi, P(E ∩ V) = P(E) × P(V | E) = 0,8 × 0,6 = 0,48. La probabilité recherchée est donc 0,48.

✓ RÉPONSE À RETENIR

P(E ∩ V) = 0,48.

Question 3. **Démontrer que la probabilité qu'un prêt débouche sur une vente est égale à 0,62.**

Les deux types de vélos couvrent toutes les possibilités et sont incompatibles. On additionne donc les probabilités de vente dans chacun des deux cas, en pondérant chaque probabilité conditionnelle par la proportion correspondante.

Type de vélo	Calcul de la contribution	Contribution à P(V)
Électrique	0,8 × 0,6	0,48
Mécanique	0,2 × 0,7	0,14

Ainsi, P(V) = 0,48 + 0,14 = 0,62.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> P(V) = 0,62.

Question 4. **Sachant que le prêt a débouché sur une vente, déterminer la probabilité qu'il s'agisse d'un vélo électrique. Arrondir à 10^{-3}.**

On cherche la probabilité qu'un vélo soit électrique sachant que le prêt a abouti à une vente. La probabilité d'une vente avec un vélo électrique est P(E ∩ V) = 0,48, et la probabilité totale d'une vente est P(V) = 0,62. On applique la formule de probabilité conditionnelle : P(E | V) = P(E ∩ V) / P(V) = 0,48 / 0,62.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> P(E | V) ≈ 0,774.

Partie B - Loi binomiale

Question 1. **On considère 80 vélos réparés et on sait que 62 % des réparations nécessitent moins d'une heure de main-d'œuvre. Sachant que X suit une loi binomiale, donner ses paramètres.**

On compte, parmi les 80 réparations, celles qui nécessitent moins d'une heure de main-d'œuvre. Chaque réparation correspond à une épreuve de Bernoulli de probabilité de succès 0,62. Le nombre de réparations répondant à ce critère suit donc une loi binomiale de paramètres n = 80 et p = 0,62. L'indépendance des réparations est prise en compte dans le modèle binomial admis par l'énoncé.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> X suit la loi binomiale de paramètres n = 80 et p = 0,62.

Question 2. **Déterminer P(X = 40), où X désigne le nombre de réparations ayant nécessité moins d'une heure de main-d'œuvre. Arrondir à 10^{-3}.**

Pour une loi binomiale de paramètres n = 80 et p = 0,62, la probabilité d'obtenir exactement 40 réparations de moins d'une heure se calcule par la formule binomiale : $P(X = 40) = C(80,40) \times 0{,}62^{40} \times 0{,}38^{40}$. Le calcul donne environ 0,0083. Arrondie au millième comme demandé, cette probabilité vaut 0,008.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> P(X = 40) ≈ 0,008 au millième.

Question 3. **Déterminer la probabilité que le nombre de vélos dont la réparation a nécessité moins d'une heure soit strictement supérieur au nombre de vélos dont la réparation a nécessité plus d'une heure. Arrondir à 10^{-3}.**

Si X vélos nécessitent moins d'une heure, les autres sont comptés parmi ceux nécessitant plus d'une heure : leur nombre est 80 − X. La condition demandée devient X > 80 − X, donc X > 40. Comme X est un entier, la probabilité cherchée est P(X ≥ 41), avec X suivant la loi binomiale B(80 ; 0,62). Le calcul donne environ 0,981.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> La probabilité cherchée est P(X ≥ 41) ≈ 0,981.

Partie C - Intervalle de confiance

Question 1. **Dans un échantillon de 90 clients, 54 sont susceptibles d'acheter le modèle haut de gamme. Donner l'estimation ponctuelle f de la proportion inconnue p de ces clients.**

L'estimation ponctuelle de la proportion inconnue est la fréquence observée dans l'échantillon. Sur les 90 clients interrogés, 54 sont susceptibles d'acheter le modèle haut de gamme. On calcule donc f = 54 / 90 = 0,60. L'estimation ponctuelle de la proportion p est ainsi 0,60, soit 60 %.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> f = 0,60, soit 60 %.

Question 2.a. **À l'aide de la formule fournie, déterminer un intervalle de confiance au niveau de confiance de 95 % pour la proportion p de clients susceptibles d'acheter le modèle haut de gamme.**

La formule fournie s'applique avec la fréquence observée f = 0,60 et la taille d'échantillon n = 90. La marge vaut $1{,}96 \times \sqrt{(0{,}60 \times 0{,}40 / 90)} \approx 0{,}1012$. On obtient donc [0,60 − 0,1012 ; 0,60 + 0,1012]. Aux millièmes, l'intervalle de confiance est [0,499 ; 0,701].

✓ **RÉPONSE À RETENIR**

Intervalle de confiance à 95 % : [0,499 ; 0,701].

Question 2.b. Indiquer si l'on est certain que la proportion p appartient à l'intervalle de confiance obtenu.

Non, on ne peut pas être certain que la proportion inconnue p appartienne à l'intervalle obtenu. Le niveau de confiance de 95 % caractérise la méthode utilisée, et non une certitude pour cet intervalle particulier. Si l'on répétait le prélèvement et la construction de l'intervalle un grand nombre de fois, environ 95 % des intervalles ainsi obtenus contiendraient la vraie proportion p.

✓ **RÉPONSE À RETENIR**

Non, l'appartenance de p à cet intervalle n'est pas certaine.

Ce qu'il faut retenir de ce sujet (Session 2023)

Bilan de l'épreuve : Épreuve de mathématiques du BTS, Groupement B, session 2023, code 23MATGRB1, durée de 2 heures et coefficient 2, sauf pour Traitement des matériaux où il est de 3. L'exercice 1 modélise la fermeture d'un tiroir par une fonction exponentielle. L'exercice 2 étudie un magasin de vélos. Les compétences évaluées couvrent équations différentielles, analyse de fonction, algorithmique, probabilités, loi binomiale et estimation statistique.

Notions-clés, formules & règles à maîtriser

- Les racines de l'équation caractéristique $r^2 + 5r + 4 = 0$ déterminent la solution générale de l'équation différentielle homogène associée.
- La dérivée négative sur un intervalle implique une fonction strictement décroissante sur cet intervalle.
- La formule des probabilités totales donne $P(V) = P(E)P(V|E) + P(\text{non } E)P(V|\text{non } E)$.
- Pour une proportion, l'intervalle fourni est $f \pm 1{,}96\sqrt{f(1 - f)/n}$, où f est la fréquence observée.

Points de vigilance & attentes du jury

- Distinguer la distance f(t) de sa dérivée, qui représente la vitesse, et respecter les signes ainsi que les unités.
- Dans l'algorithme, appliquer l'incrément de 0,1 et tester la condition à chaque étape jusqu'à ce qu'elle devienne fausse.
- Pour la loi binomiale, identifier le nombre d'essais et la probabilité de succès avant de traduire l'événement demandé.
- Un intervalle de confiance à 95 % ne signifie pas que l'on est certain que la proportion inconnue lui appartient.

Questions fréquentes sur cette épreuve (Q&A Examen)

Q : Comment déterminer la solution de l'équation différentielle du tiroir ?

Résolvez d'abord $r^2 + 5r + 4 = 0$. Les racines donnent les exponentielles de la solution générale. Utilisez ensuite les valeurs initiales de f et de f' pour déterminer les constantes, en respectant les unités de distance et de vitesse.

Q : Comment traduire la comparaison des nombres de réparations ?

Si X réparations sur 80 nécessitent moins d'une heure, les $80 - X$ autres nécessitent plus d'une heure. La condition demandée devient $X > 80 - X$, soit $X > 40$. On calcule ensuite cette probabilité avec la loi binomiale.

Q : Combien de points vaut chaque exercice et quelle durée prévoir ?

Le sujet attribue 10 points à chacun des deux exercices et prévoit une durée totale de 2 heures. Il ne précise pas de répartition des points entre les questions. Répartissez donc votre temps selon le nombre de tâches et leur difficulté.

Q : L'intervalle de confiance garantit-il que la proportion réelle est dedans ?

Non. L'intervalle au niveau de confiance de 95 % est construit à partir de l'échantillon et fournit une estimation de la proportion. Il ne permet pas d'affirmer avec certitude que la proportion réelle appartient à cet intervalle.

Sujet officiel associé (PDF) : https://btsbiorp.fr/assets/annales/bts-biorp/E2 - Mathématiques/2023/BTS BioRP - E2 - Mathématiques - Session 2023 - 1-Sujet.pdf

Ressources BTS BioRP : Toutes les annales & corrigés • Fiches de révision complètes • Simulateur de notes d'examen

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.