Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour consulter tous nos sujets d'annales et corrigés du BTS BioRP, veuillez visiter :
btsbiorp.fr/annales-sujets-et-corriges

BTS BIORP • CORRIGÉ DÉTAILLÉ

BTS BioRP

Mathématiques

Session 2022 • Code sujet : **22MATGRB2** • Durée : **2 heures** • Coefficient : **1,5 en Conception et industrialisation en microtechniques ; 2 en Électrotechnique**

Sommaire

Cliquez sur une partie pour y accéder directement

1. Freinage d'un chariot de fête foraine (12 questions) **Page 3**

2. Étude d'un système électrique par transformation de Laplace (9 questions) **Page 7**

3. Ce qu'il faut retenir & Questions fréquentes (FAQ) (Synthèse & Q&A Examen) **Page 11**

Sujet officiel (PDF) : https://btsbiorp.fr/assets/annales/bts-biorp/E2 - Mathématiques/2022/BTS BioRP - E2 - Mathématiques - Session 2022 - 2-Sujet.pdf

1. Freinage d'un chariot de fête foraine

Un chariot lancé à 20 m·s⁻¹ ralentit sous l'action d'un système de freinage, et sa vitesse est modélisée par une fonction vérifiant une équation différentielle. L'étude mobilise les variations et la limite de cette fonction, le calcul d'une distance parcourue et un développement limité au voisinage de zéro.

Partie A - Résolution d'une équation différentielle

Question 1.a. Résoudre l'équation différentielle homogène y' + 0,8y = 0 sur l'intervalle considéré.

On applique la formule des solutions de l'équation homogène $y' + ay = 0$, avec $a = 0{,}8$. Ainsi, pour tout réel k, la fonction $y(t) = ke^{-0{,}8t}$ est solution. La constante k peut prendre toute valeur réelle.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$$\boxed{y(t) = ke^{-0{,}8t}, \quad k \in \mathbb{R}}$$

Question 1.b. Vérifier que la fonction g définie par g(t) = 5 est solution de l'équation différentielle y' + 0,8y = 4.

La fonction g est constante, donc sa dérivée est nulle : $g'(t) = 0$. En la substituant dans le membre de gauche, on obtient $g'(t) + 0{,}8g(t) = 0 + 0{,}8 \times 5 = 4$. Cette valeur étant égale au second membre, g vérifie bien l'équation différentielle proposée.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$g(t) = 5$ est solution de $y' + 0{,}8y = 4$.

Question 1.c. Déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle y' + 0,8y = 4.

La fonction constante $g(t) = 5$ est une solution particulière de l'équation complète. Toute autre solution s'obtient en lui ajoutant une solution de l'équation homogène associée, qui est de la forme $ke^{-0{,}8t}$. On obtient ainsi toutes les solutions sur l'intervalle considéré.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$$\boxed{y(t) = 5 + ke^{-0{,}8t}, \quad k \in \mathbb{R}}$$

Question 2. Déterminer la solution f de l'équation différentielle qui vérifie la condition initiale f(0) = 20.

On utilise la solution générale trouvée précédemment et la condition initiale. Pour $t = 0$, l'exponentielle vaut $e^0 = 1$, donc $f(0) = 5 + k$. L'égalité $f(0) = 20$ impose $k = 20 - 5 = 15$. En remplaçant k, on obtient l'expression de la vitesse pendant le freinage.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$\boxed{f(t) = 15e^{-0,8t} + 5}$

Partie B - Étude de la fonction f

Question 1.a. Démontrer que la limite de f(t) lorsque t tend vers +∞ est égale à 5.

Dans $f(t) = 15e^{-0,8t} + 5$, lorsque t tend vers $+\infty$, l'exposant $-0,8t$ tend vers $-\infty$. Par conséquent, $e^{-0,8t}$ tend vers 0, puis le terme $15e^{-0,8t}$ tend aussi vers 0. La limite de $f(t)$ est donc le terme constant.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$\boxed{\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = 5}$

Question 1.b. Déduire de cette limite que la courbe C admet une asymptote, puis en donner une équation.

La limite de $f(t)$ en $+\infty$ est finie et vaut 5. D'après le critère d'asymptote horizontale, la courbe représentative C se rapproche donc de la droite horizontale d'ordonnée 5 lorsque t augmente indéfiniment.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Asymptote horizontale en $+\infty$: $\boxed{y = 5}$.

Question 2. À partir de l'expression donnée de f', dresser le tableau de variation de f sur [0 ; +∞[.

t	0	$+\infty$
Signe de $f'(t)$	$-$	
Variation de f	20	$\searrow 5$

Comme $e^{-0,8t} > 0$ pour tout $t \geq 0$, on a $f'(t) = -12e^{-0,8t} < 0$. La fonction est strictement décroissante et tend vers 5, sans atteindre cette limite.

✓ RÉPONSE À RETENIR

f décroît strictement de 20 vers 5 sur $[0; +\infty[$.

Question 3. Déterminer si le système de freinage permet au chariot de s'arrêter.

Pour s'arrêter, le chariot devrait atteindre une vitesse nulle. Or, pour tout temps fini $t \geq 0$, le terme $15e^{-0,8t}$ est strictement positif. La vitesse reste donc supérieure à 5 et tend vers 5 sans l'atteindre.

- Le freinage ralentit le chariot.
- Selon le modèle, il ne l'arrête pas.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> Non : $f(t) > 5$ pour tout $t \geq 0$, donc la vitesse n'atteint jamais zéro.

Question 4.a. **Vérifier que la fonction F définie par F(t) = −18,75e^(−0,8t) + 5t est une primitive de f sur [0 ; +∞[.**

On dérive chaque terme de $F(t) = -18{,}75e^{-0{,}8t} + 5t$. Par la règle de dérivation de l'exponentielle composée, $F'(t) = (-18{,}75)(-0{,}8)e^{-0{,}8t} + 5$. Le produit des deux coefficients vaut 15, donc $F'(t) = 15e^{-0{,}8t} + 5 = f(t)$.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> $\boxed{F'(t) = f(t)}$, donc F est une primitive de f.

Question 4.b. **Calculer la valeur exacte de la distance parcourue entre les instants t₀ = 0 et t₁ = 1, puis donner une valeur arrondie au centimètre.**

La distance cherchée est l'intégrale de f entre 0 et 1. Avec la primitive donnée, $d = F(1) - F(0)$. On obtient $d = (-18{,}75e^{-0{,}8} + 5) - (-18{,}75) = 23{,}75 - 18{,}75e^{-0{,}8}$. L'arrondi au centimètre est effectué à partir de cette valeur exacte.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> $\boxed{d = 23{,}75 - 18{,}75e^{-0{,}8} \approx 15{,}33 \text{ m}}$

Partie C - Étude locale

Question 1. **Choisir, parmi les propositions, le développement limité de f à l'ordre 2 au voisinage de zéro. Une seule réponse est exacte ; aucune justification n'est demandée.**

Le logiciel donne la partie polynomiale $20 - 12t + \frac{24}{5}t^2$. Le reste d'un développement limité à l'ordre 2 s'écrit $t^2\varepsilon(t)$, où $\varepsilon(t)$ tend vers 0 lorsque t tend vers 0. On choisit donc la proposition qui ajoute ce reste au polynôme, avec $\frac{24}{5} = 4{,}8$.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> Troisième proposition : $\boxed{20 - 12t + 4{,}8t^2 + t^2\varepsilon(t)}$, avec $\varepsilon(t) \to 0$.

Question 2. Donner une équation de la tangente T à la courbe C au point d'abscisse 0.

Le point de tangence a pour coordonnées $(0; f(0)) = (0; 20)$. Le coefficient directeur de la tangente est $f'(0) = -12e^0 = -12$. En utilisant l'équation point-pente, on écrit $y - 20 = -12(t - 0)$, puis on simplifie.

✓ **RÉPONSE À RETENIR**

$\boxed{T : y = 20 - 12t}$

2. Étude d’un système électrique par transformation de Laplace

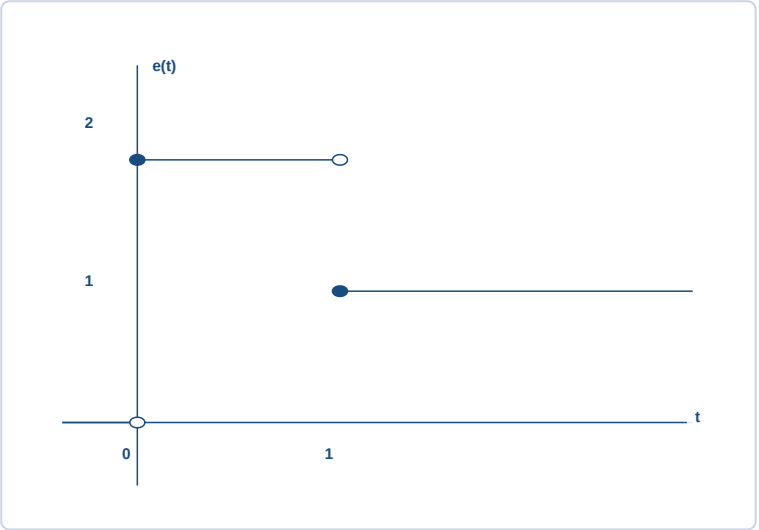
Un système électrique causal reçoit le signal d’entrée e(t) = 2U(t) − U(t − 1), et sa fonction de transfert est H(p) = 1/(p + 1). L’exercice porte sur la représentation du signal d’entrée, les transformées de Laplace et leur inversion, puis sur l’expression et le comportement du signal de sortie.

Partie A - Signal d’entrée

Question 1. Tracer sur le document-réponse la courbe représentative de la fonction e(t).

La fonction échelon vaut 0 avant son origine et 1 à partir de celle-ci. Ainsi, e(t) vaut 0 pour t < 0, puis 2 dès t = 0. À t = 1, le terme soustrait s’active : le signal passe de 2 à 1 et reste à cette valeur. Sur le tracé, les cercles ouverts et pleins indiquent les valeurs non prises et prises aux instants de saut.

Signal d’entrée e(t)



✓ RÉPONSE À RETENIR

e(t) = 0 si t < 0, e(t) = 2 si 0 ≤ t < 1, et e(t) = 1 si t ≥ 1.

Question 2. Déterminer la transformée de Laplace E(p) du signal d’entrée.

La transformée de Laplace est linéaire, donc on transforme séparément les deux termes de e(t). Le formulaire donne $\mathcal{L}\{U(t)\} = 1/p$. Pour le terme retardé, on utilise $\mathcal{L}\{U(t-1)\} = e^{-p}/p$, avec un retard d’une unité. En multipliant la première transformée par 2 et en soustrayant la seconde, on obtient E(p).

✓ RÉPONSE À RETENIR

La transformée du signal d’entrée est $E(p) = \dfrac{2}{p} - \dfrac{e^{-p}}{p}$, pour $p > 0$.

Partie B - Signal de sortie

Question 1. Démontrer que S(p) = 2/[p(p + 1)] − [1/(p(p + 1))]e^(−p).

Par définition de la fonction de transfert, on a S(p) = H(p)E(p). On remplace H(p) par sa valeur donnée et E(p) par la transformée obtenue en partie A. Il suffit ensuite de distribuer le facteur $1/(p+1)$ sur les deux termes, puis de réunir les facteurs p et p + 1 au dénominateur :

$$S(p) = \frac{1}{p+1}\left(\frac{2}{p} - \frac{e^{-p}}{p}\right) = \frac{2}{p(p+1)} - \frac{e^{-p}}{p(p+1)}.$$

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> On obtient bien $S(p) = \dfrac{2}{p(p+1)} - \dfrac{e^{-p}}{p(p+1)}$.

Question 2. Vérifier que 1/[p(p + 1)] = 1/p − 1/(p + 1).

Pour vérifier l'égalité, on réduit le membre de droite au dénominateur commun p(p + 1). Le premier numérateur devient p + 1 et le second p. Leur différence vaut 1. On retrouve donc exactement le membre de gauche, pour les valeurs de p où les deux fractions sont définies :

$$\frac{1}{p} - \frac{1}{p+1} = \frac{(p+1) - p}{p(p+1)} = \frac{1}{p(p+1)}.$$

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> L'identité est vérifiée : $\dfrac{1}{p(p+1)} = \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{p+1}$.

Question 3. Donner les transformées de Laplace inverses de 1/p, de 1/(p + 1), de e^(−p)/p et de e^(−p)/(p + 1).

Les deux premières transformées inverses sont données directement par le formulaire, en utilisant la transformée de l'échelon et celle de l'exponentielle décroissante. Pour les deux autres, le facteur e^{-p} correspond à un retard d'une unité : on multiplie chaque fonction inverse par $U(t-1)$ et on remplace t par t − 1 dans l'expression exponentielle. On obtient ainsi les quatre fonctions demandées.

- $\mathcal{L}^{-1}(1/p) = U(t)$;
- $\mathcal{L}^{-1}(1/(p+1)) = e^{-t}U(t)$;
- $\mathcal{L}^{-1}(e^{-p}/p) = U(t-1)$;
- $\mathcal{L}^{-1}(e^{-p}/(p+1)) = e^{-(t-1)}U(t-1)$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Dans l'ordre demandé, les inverses sont $U(t)$, $e^{-t}U(t)$, $U(t-1)$ et $e^{-(t-1)}U(t-1)$.

Question 4. **En déduire l'expression de s(t) sur l'intervalle [0 ; 1[.**

On remplace la fraction $1/[p(p+1)]$ par sa décomposition en éléments simples, ce qui donne $S(p) = 2(1/p - 1/(p+1)) - e^{-p}(1/p - 1/(p+1))$. Sur l'intervalle $[0;1[$, l'échelon retardé $U(t-1)$ vaut 0. Les deux termes contenant ce retard ne contribuent donc pas. Il reste l'inverse de $2/p - 2/(p+1)$, ce qui donne l'expression du signal de sortie sur cet intervalle.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Sur $[0;1[$, le signal de sortie est $s(t) = 2(1 - e^{-t})$.

Question 5.a. **À partir de l'expression admise de s(t) sur [1 ; +∞[, calculer s(1), d'abord sous forme exacte puis avec une valeur approchée au dixième.**

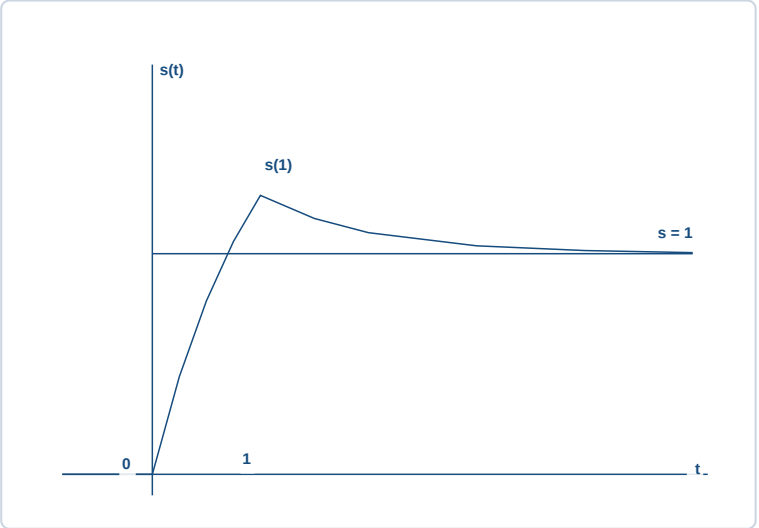
À l'instant t = 1, on applique l'expression admise pour t ≥ 1. En remplaçant t par 1, on obtient $s(1) = (e-2)e^{-1} + 1$. Comme $(e-2)e^{-1} = 1 - 2/e$, la forme exacte se simplifie en $2 - 2/e$. Avec $e \approx 2,71828$, la valeur est environ 1,264 ; l'arrondi au dixième est donc 1,3.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> La valeur exacte est $s(1) = 2 - \dfrac{2}{e}$, soit environ 1,3 au dixième.

Question 5.b. **Compléter sur le document-réponse la courbe représentative de la fonction s.**

La courbe part de l'origine, car le système est causal et $s(0) = 0$. Jusqu'à t = 1, elle suit $s(t) = 2(1 - e^{-t})$ et atteint $2 - 2/e \approx 1,264$. Après t = 1, elle suit $s(t) = (e-2)e^{-t} + 1$: elle décroît et se rapproche de 1. Les deux expressions donnent la même valeur à t = 1, donc le raccord est continu.

Courbe du signal de sortie s(t)



✓ RÉPONSE À RETENIR

La courbe monte de $(0;0)$ à $(1;2-2/e)$, puis décroît vers l'asymptote horizontale $s=1$.

Question 5.c. Donner la limite de s(t) lorsque t tend vers +∞.

Pour tout t ≥ 1, l'expression admise est $s(t)=(e-2)e^{-t}+1$. Le facteur e − 2 est constant, tandis que l'exponentielle e^{-t} tend vers 0 lorsque t tend vers +∞. Par conséquent, le produit $(e-2)e^{-t}$ tend aussi vers 0. Il ne reste alors que le terme constant 1, qui donne la limite demandée.

✓ RÉPONSE À RETENIR

La limite du signal de sortie lorsque t tend vers +∞ est 1.

Ce qu'il faut retenir de ce sujet (Session 2022)

Bilan de l'épreuve : Cette épreuve de mathématiques du BTS, session 2022, porte le code 22MATGRB2 et dure deux heures. Le coefficient est de 1,5 en Conception et industrialisation en microtechniques et de 2 en Électrotechnique. Deux exercices de 10 points étudient le freinage d'un chariot et un système électrique, avec équations différentielles, analyse, intégration et transformations de Laplace.

Notions-clés, formules & règles à maîtriser

- Pour y' + ay = b, on combine une solution particulière de l'équation complète et les solutions de l'équation homogène.
- Si f(t) tend vers L en +∞, sa courbe admet l'asymptote horizontale d'équation y = L.
- La distance parcourue entre t_0 et t_1 est l'intégrale de la vitesse : d = $\int_{t_0}^{t_1} f(t)dt$.
- Le retard f(t − a)U(t − a) correspond en transformée de Laplace à F(p)e^(−ap).

Points de vigilance & attentes du jury

- Après la solution générale de l'équation différentielle, appliquer la condition initiale pour déterminer la constante.
- Justifier les variations par le signe de f' et examiner si la vitesse atteint zéro pour conclure sur l'arrêt.
- Pour la distance, calculer $F(t_1) - F(t_0)$, puis respecter l'unité et l'arrondi demandés.
- Pour le signal retardé, utiliser le facteur e^(−p) et la propriété de décalage temporel du formulaire.

Questions fréquentes sur cette épreuve (Q&A Examen)

Q : Comment résoudre l'équation différentielle du modèle de freinage ?

Résolvez d'abord l'équation homogène y' + 0,8y = 0, puis ajoutez une solution particulière constante à l'équation complète. Appliquez enfin f(0) = 20 pour déterminer la constante et obtenir la fonction vitesse.

Q : Comment trouver l'asymptote et décider si le chariot s'arrête ?

Calculez la limite de f(t) lorsque t tend vers +∞ : elle donne l'ordonnée de l'asymptote horizontale. Pour conclure sur l'arrêt, vérifiez si la vitesse atteint zéro à un instant ou tend vers zéro.

Q : Comment répartir son temps pendant cette épreuve ?

Les deux exercices valent chacun 10 points et l'épreuve dure deux heures. Répartissez le temps entre les deux sujets, en gardant une marge pour vérifier les calculs et reporter soigneusement les courbes sur le document-réponse.

Q : Quels points de présentation et de précision faut-il surveiller ?

Le sujet demande notamment une distance arrondie au centimètre et une valeur de s(1) arrondie au dixième. Indiquez les expressions exactes avant les approximations et utilisez le document-réponse pour les deux tracés demandés.

Sujet officiel associé (PDF) : https://btsbiorp.fr/assets/annales/bts-biorp/E2 - Mathématiques/2022/BTS BioRP - E2 - Mathématiques - Session 2022 - 2-Sujet.pdf

Ressources BTS BioRP : Toutes les annales & corrigés • Fiches de révision complètes • Simulateur de notes d'examen

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.